08. КОЛИВАННЯ

1.1.Коливання. Положення рівноваги. Зміщення. Коливальна система. Період та частота коливань. Механічні коливання

Коливання в загальному розумінні – це повторювана зміна. З цих позицій можна говорити про коливання швидкості, тиску, температури, електричного поля, і навіть ціни та настрою. Коливальний процес характеризується величинами, які коливаються. *Коливання величини* теж означає зміну, при якій її значення повторюється. Сукупність тіл, взаємодія між якими зумовлює коливання, називається *коливальною системою.*

Стан коливальної системи, який вона може зберігати незмінним як завгодно довго при відсутності зовнішніх дій, називають рівноважним, або *положенням рівноваги. Коливальне зміщення* – це відхилення від положення рівноваги, або різниця миттєвого і рівноважного значень коливної величини. Максимальне зміщення називається *амплітудою*.

До найпростіших коливань належать *періодичні*, тобто такі, при яких стан коливальної системи (значення коливальної величини) повторюється через однаковий проміжок часу. Повторення стану коливальної системи означає повторення значень параметрів, що визначають стан системи.

Найменший проміжок часу, через який стан коливальної системи (значення коливальної величини) повторюється, називають *періодом коливання* (T). Можна сказати, що *період* – це час одного повного коливання.

Якщо за час t здійснюється N коливань, то

$$T = \frac{t}{N}.$$

Величина обернена періоду, яка чисельно рівна кількості коливань за одиницю часу, називається *частотою коливань* (ν). Таким чином, частота коливань рівна відношенню числа коливань до часу їх здійснення.

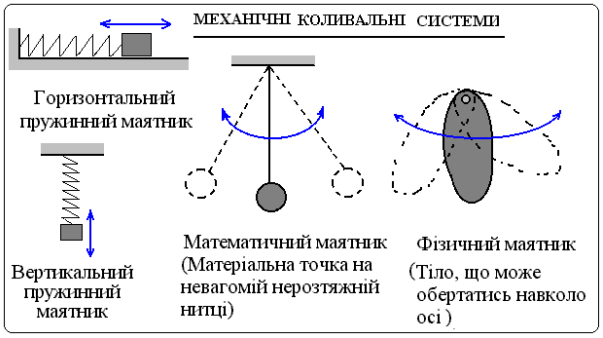
$$\nu = \frac{1}{T},$$

$$\nu = \frac{N}{t}.$$

Оскільки в системі СІ період вимірюється в секундах, то за одиницю частоти *герц* (Гц) приймається частота при якій за одну секунду здійснюється одне повне коливання.

Механічні коливання – це рухи тіла, при яких його положення повторюється. Такі рухи пов’язані з почерговим зміщенням тіла в протилежних напрямках.

Механічна рівновага – це стан, в якому всі діючі сили компенсуються. Механічні коливання здійснюються саме відносно положення рівноваги.



Приклади коливальних систем, в яких відбуваються механічні коливання, наведені на малюнку.

Слід звернути увагу на те, що до складу цих коливальних систем входить Земля, або поле сил тяжіння.

1.2.Вільні (власні) коливання. Повертаюча (відновлююча) сила. Гармонійні коливання. Зміщення, фаза, швидкість, прискорення при гармонійних коливаннях та їх графіки

Вільні коливання – це коливання зумовлені взаємодією лише між тілами коливальної системи, і які відбуваються за рахунок попередньо наданої їй енергії.

Сила, що повертає систему в положення рівноваги (відновлює це положення), називається *повертаючою (відновлюючою*).

У випадку немеханічних коливань можна визначити деякий *повертаючий (відновлюючий) фактор.*

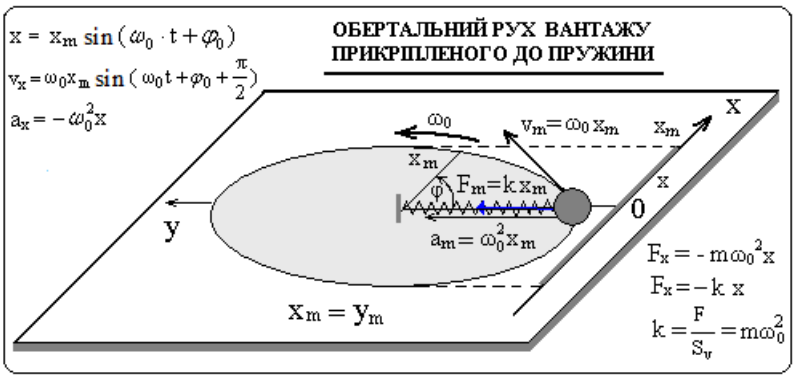
Розглянемо коливання пов'язані з обертанням в горизонтальній площині вантажу, прикріпленого до одного кінця пружини, що рухається по колу, з центром в точці закріплення іншого кінця пружини. Положення вантажу визначається вектором довжиною x_m, який сполучає центр кола з цим вантажем. Внаслідок обертального руху вантаж здійснює коливання по осі Ох та Оу з циклічною частотою ω_0. Амплітуда цих коливань рівна x_m. Якщо вантаж здійснив поворот відносно початкового положення на кут φ, то координата тіла x, яка є проекцією коливного зміщення на обрану вісь (див. мал.) змінюється з часом наступним чином

$$x = x_m \sin \varphi ,$$

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0} ,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t - \omega_0 t_0 = \omega_0 t + \Phi .$$

Якщо коливальна величина змінюється з часом за законом гармонійної функції (sin, або cos), то її коливання називаються ***гармонійними***.



Аргумент φ гармонійної функції в рівнянні коливань називається *фазою коливання* і визначає стан коливальної системи в даний момент часу.

Фаза коливань в нульовий момент часу Ф називається початковою. Вона виникає, якщо відлік часу, або самої фази не ведеться з нуля. *В подальшому, ми будемо відлік часу завжди вести з 0 і початкову фазу позначати φ_0.*

Отже, координата тіла здійснює гармонійні коливання за рівнянням, яке називається рівнянням коливного зміщення (точніше, проекції зміщення)

$$x = x_m \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) .$$

Залежність коливального зміщення по осі 0x від часу можна подати графічно (див. мал.), використавши зв'язок обертального та коливального рухів. Графік залежності є косинусоїдою. При виборі горизонтального початкового положення радіус-вектора, графік буде синусоїдою. Якщо в якості початкового положення обрати вертикальне, коливальне зміщення буде описуватися косинусоїдою.

Швидкість коливань (мова завжди йтиме про проекцію швидкості на вісь по лінії коливань) є проекцією швидкості обертального руху на дану вісь.

$$v_x = -v_m \sin\varphi = -\omega_0 x_m \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) = \omega_0 x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}).$$

З останнього видно, що після приведення до однієї функції, фаза швидкості (проекції швидкості) більша за фазу зміщення на $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$, тобто *швидкість коливань випереджує їх зміщення за фазою* на $\frac{\pi}{2}$.

Оскільки $\Delta\varphi = \omega_0 \Delta t$, то випередження за фазою означає випередження за часом. В даному випадку це випередження становить четверть періоду коливань у відповідності до розрахунку, за яким:

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega_0} = \frac{\pi T}{2 \cdot 2\pi} = \frac{T}{4}.$$

Множник перед знаком гармонійної функції є амплітудою коливань швидкості (v_m).

$$v_m = \omega_0 x_m.$$

Прискорення коливань (проекція прискорення на вісь) буде проекцією обертового (нормального) прискорення на дану вісь.

$$a_x = -a_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0^2 x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)).$$

Також, враховуючи рівняння зміщення,

$$a_x = -\omega_0^2 x.$$

Амплітуда коливань прискорення

$$a_m = \omega_0^2 x_m.$$

Коливання прискорення випереджують коливання зміщення за фазою на $\Delta\varphi=\pi$, що відповідає випередженню в часі на

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega_0} = \frac{\pi \cdot T}{2\pi} = \frac{T}{2}.$$

Зауважимо, що, формально, амплітуда коливань – це множник гармонійної функції, циклічна частота – множник часу в рівнянні коливань.

Графіки зміщення, швидкості та прискорення гармонійних коливань подано на малюнку.

Приклади

1. Маятник за 10^2 с здійснює $5 \cdot 10^2$ коливань. Знайти циклічну частоту коливань.
Відповідь. $\omega = 2\pi\nu = 31{,}4$ с$^{-1}$.

2.Різниця фаз двох коливань становить $\Delta\varphi = \pi / 4$. Як відрізняються в часі моменти досягнення амплітуди цих коливань ?

Відповідь. $\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{T}{8}$.

3.Скласти рівняння зміщення гармонійного коливання з амплітудою x_m = 5см , періодом T = 0,01 с, якщо в початковий, нульовий момент часу спостерігається амплітудне зміщення.

*Відповідь.*x = 0,05 cos 200 π t.

4.Частинка коливається за рівнянням $x = \sin\frac{\pi}{3}t$ м. Знайти моменти часу, в які вона досягає максимальної швидкості і прискорення.

Розв'язання. Моменти досягнення максимальної швидкості випливають з рівняння $\cos\frac{\pi}{3}t = \pm 1$, звідки $\frac{\pi}{3}t = k\pi$ та t = 3k с (k є Z); максимального прискорення з рівняння $-\sin\frac{\pi}{3}t = \pm 1$ звідки $\frac{\pi}{3}t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ та $t = 3(k\pi + \frac{1}{2})$ с.

5 .Вантаж, що гармонійно коливається, за t = 0,1 с зміщується на x = 0,5 см від положення рівноваги в бік амплітудного, рівного x_m = 1 см. Знайти період коливань T та написати рівняння зміщення цих коливань.

Розв'язання. За загальним рівнянням зміщення $x = x_m \sin\frac{2\pi}{T}t$, отримаємо $0{,}5 = \sin\frac{2\pi}{T}\cdot 0{,}1$, тобто $\sin\frac{0.2\pi}{T} = 0{,}5$, звідки $\frac{0{,}2\pi}{T} = \frac{\pi}{6}$, остаточно T = 1,2 с . Рівняння зміщення цих коливань $x = \sin\frac{5\cdot\pi}{3}t$ см.

6. Частинка коливається за рівнянням $x = 5\sin\pi(0{,}2t + 0{,}1)$см . Написати рівняння швидкості та прискорення цих коливань.

Розв'язання. Порівнявши дане конкретне рівняння зі загальним $x = x_m \sin\cdot(\omega\cdot t + \varphi_o)$, визначимо, що $x_m = 5см, \omega = 0{,}2\pi\cdot c^{-1}, \varphi_o = 0{,}1\pi$.

Амплітуда швидкості $v_m = \omega\cdot x_m = \pi\cdot\frac{см}{c}$, прискорення $a_m = \omega^2 x_m = 0{,}2\pi^2\cdot\frac{см}{c^2}$.

Рівняння швидкості та прискорення: $v_x = \pi\cos\pi(0{,}2t + 0{,}1)\frac{см}{c} = \pi\sin\pi(0{,}2t + 0{,}6)\frac{см}{c}$;

$a_x = -0{,}2\pi^2\sin\pi(0{,}2t + 0{,}1)\frac{см}{c^2}$.

7. В скільки разів час t_1 проходження точкою, що коливається, першої половини амплітуди менший, ніж час t_2 проходження другої половини?

Час руху на першій половину амплітуди знаходиться за рівнянням зміщення

$\frac{x_m}{2} = x_m \sin\frac{2\pi}{T}t_1$, звідки $\sin\frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{1}{2}$, $\frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{\pi}{6}$, і $t_1 = \frac{T}{12}$.

Час руху на другій половині $t_2 = \frac{T}{4} - \frac{T}{12} = \frac{T}{6}\cdot$,врешті $\frac{t_2}{t_1} = 2$.

8. Скласти рівняння зміщення гармонійного коливання, якщо його амплітуда x_m = 4 см, період T = 0,01 с, а $x_0 = 0$.

Відповідь. x = 4 sin 200 π t.

Розв'язання. $\omega = \frac{2\pi}{T} = 200\pi$, φ_0 = 0. x = 4 sin 200 π t.

9. Написати рівняння зміщення вантажу масою m на вертикальній пружині жорсткістю k, якщо в початковий момент пружина була розтягнута на x_0 а вантажу надана швидкість v_0 напрямлена вертикально вгору.

Розв'язання. Має бути $x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$, де $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Потрібно знайти амплітуду та початкову фазу. Відомо, що $v_x = \omega_0 x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$,
Зі початкових умов: $x_0 = x_m \sin\varphi_0$ (1) , $v_0 = \omega_0 x_m \cos\varphi_0$ (2) .
Піднесенням до квадрату та додаванням отримаємо

$\frac{x_0^2}{x_m^2} + \frac{v_0^2}{\omega_0^2 x_m^2} = 1$. Звідки $x_m = \sqrt{x_0 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$.

В результаті ділення (1) та (2) отримаємо $\varphi_0 = \mathrm{arctg}\frac{x_0\omega_0}{v_0}$.

10. Матеріальна точка коливається по закону $x = a\sin^2(\omega \cdot t - \frac{\pi}{4})$. Знайти амплітуду і період цих коливань та побудувати графік коливального зміщення .

Розв'язання. Запишемо рівняння коливань в стандартному вигляді, використавши формулу

$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$. Матимемо $x = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\cos(2\omega \cdot t - \frac{\pi}{2})$, звідки $A = \frac{a}{2}$, $T = \frac{\pi}{\omega}$.

Графіком цих коливань є синусоїда зміщена в додатному напрямку осі у на $\frac{a}{2}$.

Завдання

1. Рівняння гармонійних коливань має вигляд $x = x_m \sin\omega t$. Відомо, що при фазі $\varphi_1 = \pi / 6$ зміщення x = 2 см. Визначити амплітуду коливань x_m і зміщення при фазі $\varphi_2 = 3\pi / 4$.
2. Через який проміжок часу після початку коливань зміщення точки з положення рівноваги буде рівно половині амплітуди, якщо період коливань рівний T = 24 с, а початкова фаза φ_0 рівна нулю?

***Додаток**. (Для тих, хто знайомий з початками диференціального числення).*
1.3. Диференціальне рівняння гармонійних коливань

Рівняння зв'язку проекцій прискорення та зміщення гармонійних коливань називають диференціальним рівнянням даних коливань, так як проекції швидкості та прискорення гармонійних коливань можна отримати диференціюванням, шукаючи першу та другу похідну проекції зміщення

$$x = x_m\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$v_x = x^{|}(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$a_x = v_x^{|}(t) = x^{||}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Отримане рівняння можна записати у вигляді:

$$a_x = -\omega_0^2 x,$$

або

$$x^{||}(t) = -\omega_0^2 x(t),$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x .$$

Якщо похідну по часу позначати крапкою над буквеним позначенням функції, то диференціальне рівняння гармонійних коливань отримає загальновживаний компактний запис.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 .$$

Останні записи означають, що друга похідна функції (в нашому випадку координати) прямопропорційна самій функції. *Функція, для якої справедливе рівняння гармонійного коливання є гармонійною, а коефіцієнт пропорціональності є квадратом власної циклічної частоти її коливань*.

1.4. Сила. Частота та енергія гармонійних коливань . Осцилятори. Додавання коливань та суперпозиція коливань

Знайдемо силу, що здатна викликати гармонійні коливання.

$$F_x = ma_x = -m\omega_0^2 x$$

Знак «мінус» показує, що ця сила прямопропорційна коливальному зміщенню і протилежно йому напрямлена.

Так як власна коливальна сила завжди направлена до положення рівноваги, то вона називається *повертаючою* (до положення рівноваги), або *відновлюючою*.

Відношення модуля повертаючої сили до модуля коливального зміщення називається *коефіцієнтом повертаючої сили*.

$$k = \frac{F}{S_v} = m\omega_0^2.$$

Тут враховано, що $F_x = \pm F$, $x = S_{vx} = \pm S_v$.

Можна сказати, що ***гармонійні коливання*** *– це коливання під дією сили прямо пропорційної зміщенню і протилежно йому напрямленої*. Це означення гармонійних коливань називають *динамічним* на відміну від попередніх – *кінематичних*.

*Системи (чи матеріальні точки), які здійснюють коливання, називають осциляторам*и (від латинського oscillo – «коливаюсь»). Циклічну частоту вільних (власних) коливань можна виразити через коефіцієнт повертаючої сили

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ .$$

Характер залежності повертаючої сили від зміщення дає можливість віднести цю силу до центральних, а, отже, консервативних сил, які, діючи на тіла, надають їм потенціальної енергії. Формула повертаючої сили подібна до формули сили пружності. Такого типу сили називають квазіпружними (латинське quasi – квазі означає «наче», «немов би»). Потенціальна енергія квазіпружної сили виражається формулою подібною до формули енергії сили пружності.

$$E_p = \frac{kx^2}{2}, \text{ де } k = m\omega_0^2.$$

Повна енергія матеріальної точки, що гармонійно коливається, складається з кінетичної та потенціальної

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x_m^2 \sin^2\varphi}{2} + \frac{m\omega_0^2 x_m^2 \cos^2\varphi}{2} = m\omega_0^2 x_m^2.$$

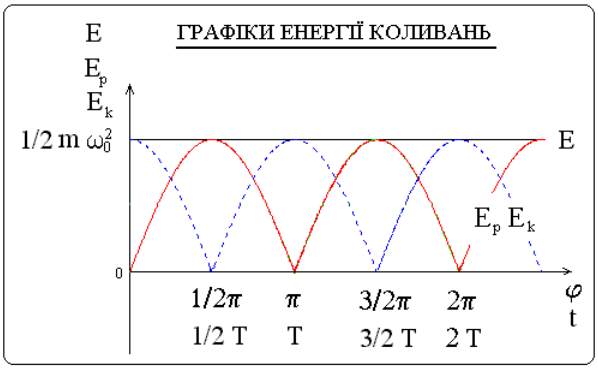
Як і слід було чекати, повна енергія коливань не залежить від часу, залишаючись величиною сталою.

Кожна з енергій гармонійно змінюється з частотою вдвічі більшою частоти коливань зміщення, так як

$$\cos^2\omega_0 \cdot t = \frac{1}{2}(1+\cos 2\omega_0 \cdot t), \text{ а } \sin^2\omega_0 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2\omega_0 t).$$

Зауваження. Оскільки множина додатних значень гармонійної функції за період відповідає такій же множині від`ємних, то середнє значення функції за цей час рівне нулю. Квадрат такої функції за період змінюється від 0 до 1, і середнє значення його повинно бути рівним 0,5, що також випливає з останніх викладок. Тому середні значення кінетичної і потенціальної енергії коливань за період рівні, і вдвічі менші за середнє значення повної енергії.

$$\bar{E}_k = \bar{E}_p = 0{,}5\bar{E}.$$



При обчисленні повної енергії додавались гармонійні коливання. Таке додавання можна виконати аналітично та графічно, що простіше. Виявляється, що будь яку періодичну функцію, що характеризує коливання, можна представити у вигляді суми (в тому числі інтегральної) гармонійних функцій, які відповідають гармонійним коливанням різних амплітуд та частот. Це твердження носить назву *принципу суперпозиції коливань*. Його доведення в математичному аналізі становить зміст *теореми Фур'є*.

Графіки енергії гармонійних коливань подані на малюнку.

Зауваження

Коливання завжди відбуваються при достатньо малих відхиленнях від положення рівноваги, яке визначається мінімумом потенціальної енергії. В першому наближенні математичний опис коливань можна здійснити прийнявши залежність потенціальної енергії поблизу точки мінімуму за квадратичну. Тобто елементарну дільницю кривої графіка потенціальної енергії, в околі точки x = 0, можна наближено представити у вигляді параболи (апроксимувати параболою).

$$U \approx \alpha x^2.$$

За законом зміни потенціальної енергії

$$-\Delta U = A_0 = F_x\,\Delta x,$$

тому

$$F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x},$$

$$\Delta U = \alpha\,(x^2 - x_0^2) = \alpha\,(x - x_0)\,(x + x_0) \approx 2\,\alpha\, x\Delta x,$$

$$F_x = -2\alpha x,$$

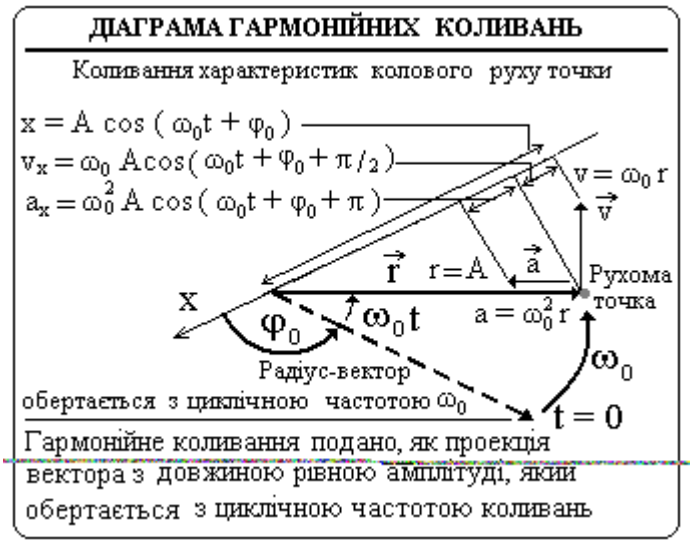
$$F_x = -kx.$$

Формула сили свідчить про гармонійність розглянутих коливань.

1.5. Метод векторних діаграм

З попереднього викладу випливає зручний спосіб оперування з гармонійно змінними величинами – *метод векторних діаграм*. За цим методом, кожну гармонійно змінну величину можна представити у вигляді проекції на вісь вектора, довжиною рівною амплітуді, який обертається навколо закріпленого початку з циклічною частотою зміни названої величини, при цьому фаза величини зобразиться кутом між вектором і віссю.

Оскільки стан системи при одновимірному русі повністю визначається координатою та імпульсом, можна ввести систему координат, з осями, на яких відкладаються вказані координата та імпульс. Така система координат визначає *фазову площину*. В процесі руху координата та імпульс змінюються, і, зображуюча стан точка, описує певну траєкторію – *фазову*.



В якості координат можна розглядати потенціальну та кінетичну енергію, адже перша з них визначається координатою, друга – імпульсом.

При одновимірних коливаннях

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \text{ або}$$

$$\frac{v_x^2}{2E \cdot /m} + \frac{x^2}{2E \cdot / \cdot k} = 1.$$

Останнє рівняння є рівнянням еліпса з напівосями 2E / m та 2E / k. Отже, фазова траєкторія вданому випадку є еліпсом.

Додавання коливань

Якщо коливання зумовлюється дією декількох сил, що діють по одній прямій, то таке коливання може бути розраховане шляхом додавання коливань, зумовлених кожною силою окремо. При
цьому результатом додавання гармонійних коливань може бути негармонійне коливання.

Додавання коливань зручно здійснювати методом векторних діаграм.

Побудуємо векторну діаграму додавання коливань однакової частоти з амплітудою A_1 та A_2 двох величин

$$x_1 = A_1 \cos\varphi_1$$

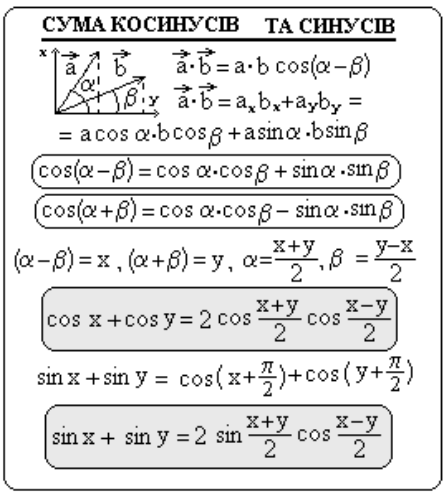
та

$$x_2 = A_2 \cos\varphi_2 .$$

Результуюче коливання

$$x = x_1 + x_2$$

зобразиться вектором, який є сумою двох векторів, які зображують коливання, що додаються. Кожна коливна величина є проекцією зображуючого вектора на вертикальну вісь.



Амплітуда A результуючого коливання за теоремою косинусів

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Биття

Знайдемо суму двох гармонійних коливань з близькими частотами $\omega_1 = \omega - \Delta\omega$ та $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$ ($\Delta\omega << \omega$).

При однакових амплітудах результуюче коливання

$$x = x_1 + x_2 = 2A\sin\frac{(\omega_2+\omega_1)t}{2}\cos\frac{(\omega_2-\omega_1)t}{2} =$$

$$= 2A\cos\Delta\omega t\sin\omega t.$$

Тут прийнято $\omega_1 + \omega_2 \approx 2\omega$.

Отримане коливання не є гармонійним, однак, при зазначених умовах для частоти, його можна розглядати, як синусоїдальне з повільно змінною амплітудою

$$B = |\,2A\cos\Delta\omega t\,|$$

та періодом

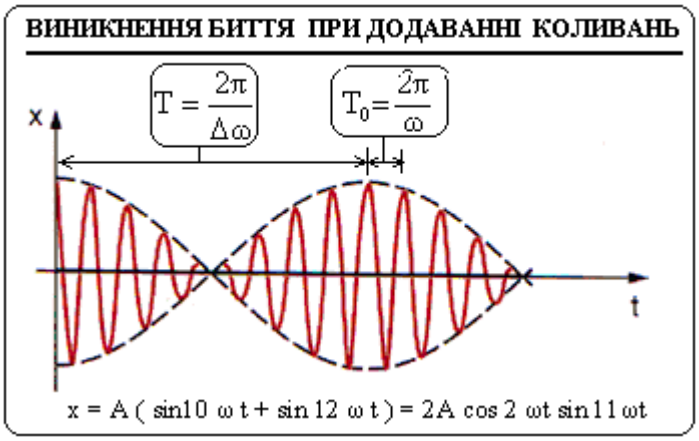
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Періодичні зміни амплітуди отриманого виду називаються биттями. Період биття

$$T = \frac{\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\omega_2-\omega_1}.$$

Частота рівна різниці частот складових коливань

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_2-\omega_1}{T} = \nu_2 - \nu_1.$$



Модульовані коливання

Знайдемо суму трьох гармонійних коливань

$$x_1 = A_0\ \sin\omega t\ ,$$
$$x_2 = A\ \sin(\omega+\Omega)t\ ,$$
$$x_3 = A\ \sin(\omega-\Omega)t\ .$$

Оскільки за формулою суми синусів

$$B\ \sin(\omega+\Omega)t + B\ \sin(\omega-\Omega)t = 2B\ \sin\omega t\cos\Omega t,$$

то

$$x = x_1 + x_2 + x_3 = A_0\,(1+\frac{2A}{A_0}\cos\Omega t)\sin\omega t\ .$$

При $\Omega << \omega$ та $k = \frac{2A}{A_0} < 1$ отримаємо майже синусоїдальне коливання з періодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

та змінною амплітудою

$$B = A_0\,(\,1 + к\cos\Omega t\,),$$

яка змінюється з періодом

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

Додавання взаємоперпендикулярних коливань

У випадку дії взаємоперпендикулярних сил, результуюче коливання буде сумою двох коливань. Нехай ці коливання здійснюються в напрямку осей x та y

$$x = a \sin \omega t ,$$
$$y = b \sin (\omega t + \varphi).$$

Тут φ – різниця фаз коливань. Якщо ця різниця становить π / 2, то

$$y = b \cos \omega t.$$

Матимемо

$$\frac{x}{a} = \sin\omega t ,$$
$$\frac{y}{b} = \cos\omega t .$$

Після піднесення цих виразів до квадрату і додавання їх, матимемо

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Отримали рівняння еліпса. Отже, частинка, яка приймає участь в двох одночасних взаємоперпендикулярних коливаннях, описує еліпс. Зокрема, якщо a = b, то еліпс стає колом.

Якщо різниця фаз є довільною, то траєкторія є еліпсом. головні осі якого повернені відносно координатних осей.

Дійсно, в даному випадку

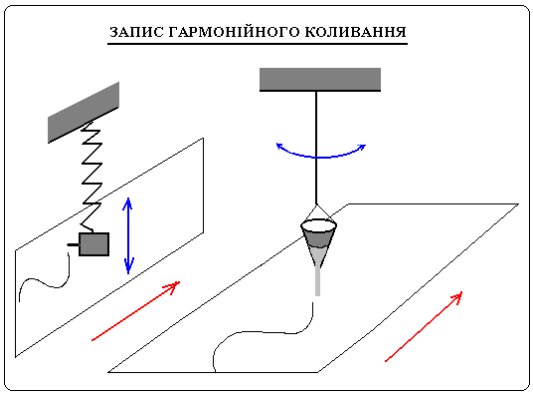
$$\frac{x}{a} = \sin\omega t ,$$
$$\cos\omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} .$$
$$\frac{y}{b} = \sin (\omega t + \varphi) = \sin \omega t \cos\varphi + \sin \varphi \cos\omega t = \frac{x}{a} \cos\varphi + \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin \varphi ,$$
$$\frac{y}{b} - \frac{x}{a} \cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin\varphi .$$

Піднісши останній вираз до квадрату, матимемо загальне рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos\varphi = \sin^2\varphi .$$

При φ= 0 та φ = π еліпс вироджується в прямі. В першому випадку пряма розташована в першому і третьому квадранті, в іншому – у другому та четвертому.

Якщо частоти взаємоперпендикулярних коливань розрізняються між собою, то траєкторії коливної частинки є складними кривими, які називаються кривими Ліссажу.



1.6. Частоти вільних коливань маятників

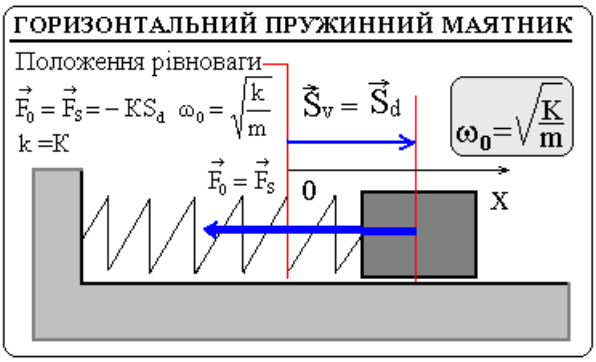
До маятників відносять тверді тіла, що здійснюють під впливом діючих сил (за звичайністю сил тяжіння, або пружності) коливання навколо нерухомої точки або осі.

Найпростішими з маятників є

пружинний та математичний. Запис коливань цих маятників за допомогою маркера прикріпленого до вантажу (див. мал.) наводить на думку про гармонійність цих коливань.

1.6.1.Пружинний маятник.

Пружний (пружинний) маятник являє собою вантаж, що здійснює коливання вздовж прямої під дією сили пружності. Щоб довести, що вільні коливання пружного маятника є гармонійними, достатньо розглянути повертаючу силу. У випадку *горизонтального пружинного маятника* такою силою є сила пружності, яка за законом Гука прямопропорційна деформаційному зміщенню і протилежно йому направлена.



$$\vec{F}_0 = \vec{F}_s = -KS_d .$$

Коливне зміщення співпадає з деформаційним

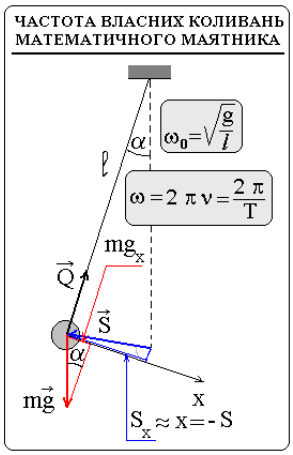
$$\vec{S}_v = \vec{S}_d .$$

Отже коливання відбуваються під дією сили прямопропорційної і оберненої до коливного зміщення. Згідно означенню, такі коливання є гармонійними. Циклічна частота цих коливань може бути знайдена за коефіцієнтом повертаючої сили, який співпадає з коефіцієнтом пружності

$$k = K,\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} .$$

1.6.2. Математичний маятник.



Математичний маятник являє собою вантаж, який можна вважати матеріальною точкою, підвішений до практично невагомої нитки, або стрижня постійної довжини в полі сили тяжіння.

Характер залежності координати вантажу від часу виявляється при запису цих коливань за допомогою маркера з витікаючим струменем.

Для доведення гармонійності коливань розглянемо повертаючу силу, яка буде сумою всіх діючих на вантаж сил: сили тяжіння та пружності нитки.

Знайдемо проекцію суми сил та коливного зміщення на дотичну до траєкторії руху вантажу.

$$F_{0x} = mg_x + Q_x = mg\sin\alpha ,$$

$$\sin\alpha \approx \alpha \approx \frac{S}{l} \approx -\frac{x}{l},$$

$$F_{0x} = -mg\frac{x}{l} .$$

Формула повертаючої сили свідчить про гармонійність коливань, і дозволяє знайти циклічну частоту цих коливань через коефіцієнт сили

$$k = \frac{mg}{l},$$

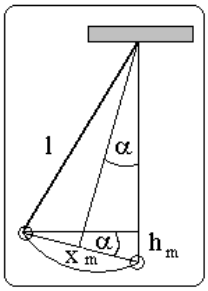
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Зауваження.

До останньої формули можна прийти на основі закону зміни енергії, врахувавши, що максимальні значення кінетичної і потенціальної енергії мають бути рівними (кінетична переходить в потенціальну)

$$\frac{mv_m^2}{2} = mgh_m.$$



За формулою гармонійних коливань

$$v_m = \omega_0 x_m.$$

Крім того, з подібності трикутників

$$\frac{h_m}{x_m} = \frac{x_m}{2l}.$$

звідки

$$h_m = \frac{x_m^2}{2l}.$$

Після підстановки в початкову формулу, матимемо

$$\frac{\omega_0^2 x_m^2}{2} = \frac{g x_m^2}{2l},$$

звідки, як і раніше

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Приклади

1. Знайти відставання маятника піднятого на висоту h над поверхнею Землі та опущеного в шахту на таку саму глибину від маятника на поверхні Землі за час t

Розв'язання

Відставання маятників зумовлюється зменшення прискорення вільного падіння, яке на висоті h можна визначити зі врахування того, що сила вагомості тіла масою m з достатньою точністю може бути визначеною за законом всесвітнього тяжіння

$$mg_1 = G\frac{Mm}{(R+h)^2},$$

де M та R є відповідно масою та радіусом Землі.

Оскільки

$$g = G\frac{M}{R^2}, \text{ то } g_1 = \frac{gR^2}{(R+h)^2}.$$

Зменшення прискорення вільного падіння з опусканням в шахту зумовлюється тим, що, внаслідок силової компенсації, на тіло діє лише та частина земної маси M_1, яка ближча віддалена до центра Землі, ніж тіло.

$$g_2 = G\frac{M_1}{(R-h)^2}.$$

Оскільки

$$\frac{M_1}{M} = \frac{(R-h)^3}{R^3}, \; M_1 = \frac{M(R-h)^3}{R^3}, \text{ то } g_2 = G\frac{M(R-h)^3}{(R-h)^2R^3} = \frac{g(R-h)}{R} = g(1-\frac{h}{R}).$$

Відставання маятника Δt рівне кількості його коливань за час t помножене на відставання за одне коливання, тобто різницю періодів.
Для піднятого маятника

$$\Delta t_1 = N(T_1 - T) = \frac{t}{T_1}(T_1 - T) = t\,(1 - \frac{T}{T_1}) = t\,(1 - \sqrt{\frac{g_1}{g}}) = t\,(1 - \frac{R+h}{R}) = \frac{th}{R}.$$

Для заглибленого

$$\Delta t_2 = t\,(1 - \sqrt{\frac{g_2}{g}}) = t\,(1 - \sqrt{\frac{R-h}{R}}) = t\,(1 - \sqrt{1 - \frac{h}{R}}).$$

Врахувавши, що за формулою бінома $\sqrt{1 - \frac{h}{R}} = (1 - \frac{h}{R})^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{h}{R}$,

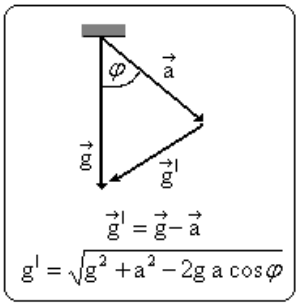
$$\Delta t_2 \approx \frac{th}{2R}.$$

2. Знайти період коливання маятника, точка підвісу якого рухається з прискоренням а.

Розв'язання
За класичною механікою, проміжки часу в різних системах є однаковими, тому зручно розглядати маятник в неінерціальній системі, де точка підвісу маятника є нерухомою.
В цій системі прискорення вільного падіння (див. мал.)

$$\vec{g}^{\,|} = \vec{g} - \vec{a},$$

$$g^{|} = \sqrt{g^2 + a^2 - 2g\,a\cos\varphi}.$$



Період коливання маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g^{|}}}.$$

1.6.3.Фізичний маятник.

Фізичний маятник являє собою тверде тіло, яке може здійснювати коливання навколо закріпленої точки, або горизонтальної осі.

Положення такого маятника визначається кутом відхилення від вертикалі, який може грати роль коливного зміщення. При розгляді коливань достатньо малої амплітуди $\sin\alpha \approx \alpha$. За рівнянням динаміки обертального руху

$$M = I\varepsilon,$$

де

$$M = -Fd = -Fr\sin\alpha \approx -mgr\alpha$$

є моментом діючих сил,
I – моментом інерції тіла відносно осі обертання,
ε– кутовим прискоренням.
Після підстановки: отримаємо
$-mg\alpha = I\varepsilon$ (напрямки моменту і кутового прискорення протилежні),
або

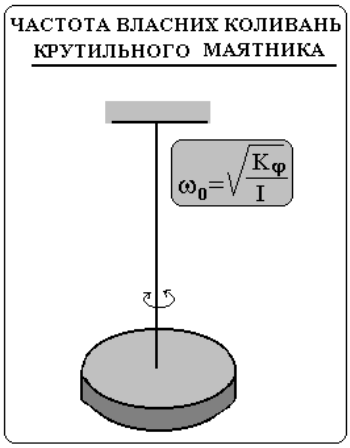
$$\varepsilon = -\frac{mgr}{I}\alpha$$

Останнє означає, що прискорення, з яким змінюється кут, прямопропорційне кутові, тобто, кут гармонійно змінюється з часом (коливається) з циклічною частотою

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgr}{I}}\,.$$

З останньої формули можна отримати, як частковий випадок, формулу частоти для математичного маятника, для якого $r = l$ та $I = ml^2$.

6.4.Крутильний маятник.



Крутильний маятник являє собою тверде тіло, точки якого здійснюють обертальні коливання в площині перпендикулярній закріпленій осі обертання.

Закон динаміки обертального руху для диска запишеться

$$M = I\varepsilon,$$

Для диска на пружній нитці, підвішеного в центрі мас повертаючою силою буде сила пружності нитки, момент якої за законом Гука для деформацій кручення буде прямопропорційний кутові закручування φ

$$M = K\varphi.$$

Матимемо

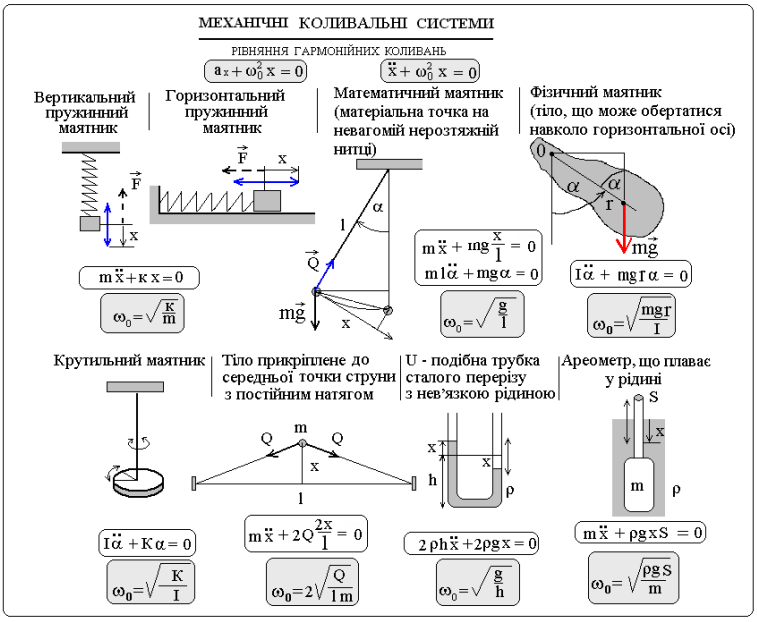
$$-K\varphi = I\varepsilon.$$

$$\varepsilon = -\frac{K}{I}\varphi\,.$$

З цього рівняння прискорення випливає висновок про гармонійність коливань з циклічною частотою

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I}}\,.$$

Наведемо підсумкову таблицю найпростіших коливальних систем



1.7.*Власні (вільні) коливання при наявності опору. Затухання коливань*

Якщо тіло коливається в середовищі, то сила тертя цього середовища чинить опір коливанням. Розглянемо випадок малих швидкостей руху, при яких сила опору середовища прямопропорційна швидкості.

$$\vec{F}_r = -b\vec{v}.$$

За рахунок роботи проти сил опору втрати енергії коливань за малий проміжок часу становитимуть

$$\Delta E = F_{rx}\Delta x = -bv_x v_x \Delta t = -\frac{2b}{m}\frac{mv_x^2}{2}\Delta t = -\frac{2b}{m}\cdot E_k \Delta t.$$

В зв'язку із змінністю швидкості, в цей запис повинна входити середня кінетична енергія, яка рівна половині повної енергії (див.4.4). Тому

$$\Delta E = -\frac{b}{m}E\cdot\Delta t.$$

Знайдемо енергію коливань через час t з моменту їх збудження при початковій енергії E_0. Після проходження першого елементарного проміжку часу $\Delta t = \frac{t}{n}(n\to\infty)$ енергія коливань становитиме

$$E_1 = E_0 - \frac{b}{m}E_0\Delta t = E_0(1-\frac{b}{m}\Delta t) = E_0(1-\frac{b}{m}\frac{t}{n}).$$

Після другого проміжку часу

$$E_2 = E_1(1-\frac{b}{m}\frac{t}{n}) = E_0(1-\frac{b}{m}\frac{t}{n})^2.$$

Після n-ого проміжку часу

$$E_n = E_0(1-\frac{bt}{mn})^n.$$

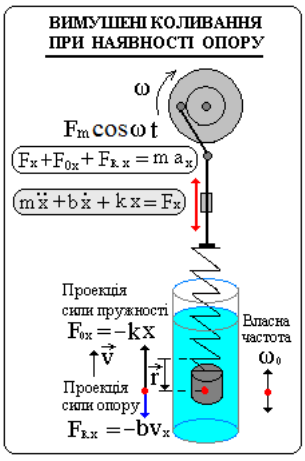
Врахувавши означення експоненціальної функції $e^x = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$, отримаємо

$$E = E_0 e^{-\frac{bt}{m}}.$$

Оскільки енергія прямопопорційна квадрату амплітуди то закон спадання амплітуди буде

$$A = A_0 e^{-\frac{bt}{2m}}.$$

1.8.Вимушені коливання. Резонанс



В зв'язку з наявністю опору, вільні коливання є затухаючими. Щоб запобігти затуханню, енергію коливань слід систематично поповнювати за рахунок підведення від стороннього джерела, як це відбувається при вимушених коливаннях. Таким чином *вимушені коливання*

відбуваються під дією зовнішньої змушуючої сили з частотою цієї сили.
Розглянемо коливання, в яких проекція зовнішньої сили

$$F_x = F_m \sin\omega \cdot t,$$

проекція коливного зміщення, яке внаслідок інертності системи повинно відставати за фазою

$$x = x_m \sin(\omega \cdot t - \varphi),$$

проекція прискорення

$$a_x = -\omega^2 x,$$

повертаючої сили

$$F_{0x} = -m\omega_0^2 x$$

сили опору

$$F_{cx} = -bv_x = -b\omega\, x_m \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2})$$

Рівняння цих коливань є рівнянням другого закону Ньютона в проекціях на лінію коливань.

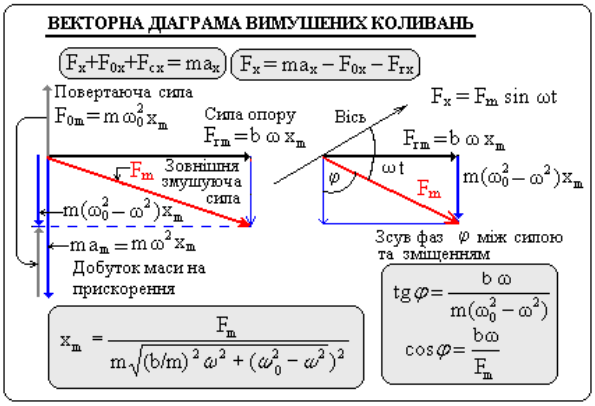
$$F_x + F_{0x} + F_{cx} = ma_x,$$

або

$$F_x = ma_x - F_{0x} - F_{cx}.$$

$$F_m \sin\omega t = -m\omega^2 x_m \sin(\omega t - \varphi) + m\omega_0^2 x_m \sin(\omega t - \varphi) + b\omega x_m \sin(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}).$$

$$F_m \sin\omega t = b\omega x_m \sin(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}) + m x_m(\omega_0^2 - \omega^2)\sin(\omega t - \varphi).$$

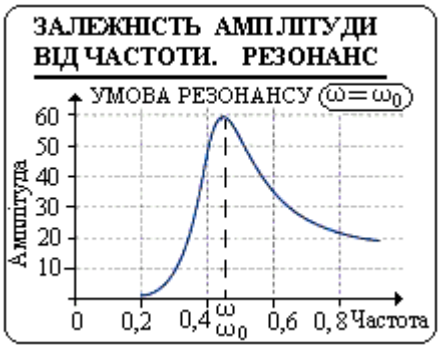


Побудуємо векторну діаграму останнього рівняння, врахувавши, що кожен з гармонійних доданків зображується вектором з довжиною рівною амплітуді коливань зображуваної величини. Кути між векторами відповідають різниці фаз. Будуватимемо, починаючи з правої частини та взявши до уваги, що доданки зобразяться векторами, напрямленими під прямим кутом. Сума векторів у правій частині дасть вектор змушуючої сили.
З векторної діаграми за теоремою Піфагора

$$F_m^2 = (b\omega \cdot x_m)^2 + (m(\omega_0^2 - \omega^2)x_m)^2.$$

Звідки амплітуда коливань

$$x_m = \frac{F_m}{\sqrt{(b^2\omega^2 + m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}.$$



Для зсуву фаз φ між змушуючою силою та коливним зміщенням

$$tg\varphi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad \cos\varphi = \frac{b\omega}{F_m}.$$

З формули амплітуди випливає, що амплітуда вимушених коливань залежить від частоти зовнішньої сили.

Також з цієї формули випливає можливість *резонансу – явища різкого зростання амплітуди вимушених коливань в результаті співпадіння частоти зовнішньої сили з власною частотою коливної системи.*

Очевидно, що екстремальна (резонансна) амплітуда коливань, яка досягається при $\omega = \omega_0$, буде

$$A_{ex} = x_{ex} = \frac{F_m}{m\beta \cdot \omega_o},$$

де

$$\beta = \frac{b}{m}.$$